

> SOS MAT

- 3^2 se lee "tres al cuadrado".
- 5^3 se lee "cinco al cubo".
- $\sqrt{6}$ se lee "raíz cuadrada de seis".
- $\sqrt[3]{20}$ se lee "raíz cúbica de veinte".

Las demás raíces se leen usando el ordinal correspondiente al índice.

Cuando no se indica el índice de la raíz, este se asume igual a dos:

$$\sqrt{a} = \sqrt{a}$$

> CALCULADORA

Para calcular la raíz enésima de un número, en algunas calculadoras se escribe primero el índice de la raíz n , se presiona SHIFT, y luego la tecla $\sqrt[n]{}$. Finalmente se escribe la cantidad subradical a , y se presiona $\boxed{=}$.

Ejemplo

Calcular $\sqrt[3]{127}$

Presiona 3, luego SHIFT y $\sqrt[n]{}$.

Escribe 127 y luego presiona la tecla $\boxed{=}$.

Raíz enésima

Considera las siguientes ecuaciones.

$$x^5 = 32$$

Es decir,

- x es el número que, multiplicado por sí mismo 5 veces, resulta 32. En este caso el número es 2.
- Se define que 2 es la **raíz quinta** de 32, y se escribe $2 = \sqrt[5]{32}$.

$$x^3 = -64$$

Es decir,

- x es el número que, multiplicado por sí mismo 3 veces, resulta -64. En este caso el número es -4.
- Se define que -4 es la **raíz cúbica** de -64, y se escribe $-4 = \sqrt[3]{-64}$.

En general, si n es un número natural, se define la **raíz enésima** a partir de la siguiente correspondencia.

$$\sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow b = a^n$$

Donde:

- la **raíz enésima** de b es a , y b es la **enésima potencia** de a .
- en la expresión $\sqrt[n]{b}$, n se llama **índice** de la raíz y b es la **cantidad subradical**, mientras que en la expresión a^n , n se llama **orden** de la potencia y a es la **base**.

Ejemplos

1. $\sqrt[4]{81} = 3$, se lee "la raíz **cuarta** de 81 es 3", pues $81 = 3^4$.
2. $\sqrt[3]{-125} = -5$, se lee "la raíz **cúbica** de -125 es -5", pues $-125 = (-5)^3$.
3. $\sqrt{0,25} = 0,5$; se lee "la raíz **cuadrada** de 0,25 es 0,5", pues $0,25 = (0,5)^2$.

Además, es importante tener en cuenta las siguientes observaciones:

- se tiene que $(-2)^2 = 4$ y también que $2^2 = 4$. Por lo tanto, podría pensarse que:

$$\sqrt{4} = 2 \text{ y } \sqrt{4} = -2$$

Es por esto que se define para toda raíz de índice par que su valor es positivo o cero. Por lo tanto, $\sqrt{4} = 2$.

- $\sqrt[n]{1} = 1$, pues $1^n = 1$.
- $\sqrt[n]{0} = 0$, pues $0^n = 0$.
- el valor de una raíz de índice impar conserva el signo de la cantidad subradical.

Raíces y restricciones

En años anteriores se estudiaron las siguientes propiedades de las potencias.

Propiedad 1	Propiedad 2
$2^4 = 16$ $(-5)^4 = 625$ $(-2)^4 = 16$ $5^4 = 625$	$(-2)^3 = -8$ $(-5)^3 = -125$ $2^3 = 8$ $5^3 = 125$
Toda potencia de base distinta de cero y exponente par tiene valor positivo. Además, si n es par, $(-a)^n = a^n$.	Una potencia de base distinta de cero y exponente impar es positiva si su base es un número positivo, y negativo en caso contrario. Además, si n es impar, $(-a)^n = -a^n$.

Lo anterior permite establecer las siguientes propiedades relativas a las raíces.

Una raíz de índice par no está definida en los Números Reales si la cantidad subradical es un número negativo.

Ejemplos

1. $\sqrt{-9} = x \Leftrightarrow -9 = x^2$

No existe un número x en los Reales que elevado al **cuadrado** sea -9 . Luego, $\sqrt{-9}$ no está definida en el conjunto de los Números Reales.

2. $\sqrt[4]{-16} = x \Leftrightarrow -16 = x^4$

No existe un número x en los Reales que elevado a la **cuarta** sea -16 . Luego, $\sqrt[4]{-16}$ no está definida en el conjunto de los Números Reales.

El valor de una raíz de índice impar es un número positivo si la cantidad subradical es positiva, y un número negativo si la cantidad subradical es negativa.

Ejemplos

1. $\sqrt[3]{-8} = x \Leftrightarrow -8 = x^3$

Donde $x = -2$, ya que $-8 = (-2)^3$. Luego, $\sqrt[3]{-8} = -2$.

2. $\sqrt[5]{243} = x \Leftrightarrow 243 = x^5$

Donde $x = 3$, ya que $243 = (3)^5$. Luego, $\sqrt[5]{243} = 3$.

> PRACTICA

Determina si las siguientes raíces están definidas en el conjunto de los Números Reales.

- | | | |
|---------------------|-----------------------|--------------------------------|
| 1. $\sqrt[6]{-3}$ | 4. $\sqrt[7]{-6.547}$ | 7. $\sqrt[6]{-\frac{7}{4}}$ |
| 2. $\sqrt[5]{426}$ | 5. $\sqrt[7]{-128}$ | 8. $\sqrt[3]{-\frac{343}{8}}$ |
| 3. $\sqrt[6]{-729}$ | 6. $\sqrt[20]{-32}$ | 9. $100\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}$ |

Calcula el valor de cada raíz y luego, si es posible, reduce la expresión.

10. $\sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-216}$

11. $\sqrt[6]{1} + \sqrt[3]{-27} - 2\sqrt[2]{-1}$

12. $\sqrt{121} + \sqrt{225} - \sqrt[3]{-64}$

13. $\sqrt[3]{-343} + \sqrt[5]{243} - \sqrt[4]{1.296}$

14. $\sqrt[3]{-0,008} + \sqrt[5]{-243}$

15. $\sqrt[3]{-0,027} + \sqrt[5]{-\frac{32}{243}} - \sqrt{0,0225}$

Raíz enésima y potencias de exponente fraccionario

En cursos anteriores se ha estudiado el concepto de potencia de base **racional** y **exponente entero**. En este curso se relacionará una potencia de **exponente fraccionario** con las **raíces enésimas**.

Sea $25^{\frac{1}{2}} = x$.

Elevando al cuadrado:

$$25^{\frac{1}{2}} = x \quad /(\)^2$$

$$\left(25^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^2$$

$$25^{\frac{1}{2} \cdot 2} = x^2$$

$$25^1 = x^2$$

$$x = \sqrt{25}$$

Es decir, $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$.

Sea $(-64)^{\frac{1}{3}} = y$.

Elevando al cubo:

$$(-64)^{\frac{1}{3}} = y \quad /(\)^3$$

$$\left((-64)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = y^3$$

$$(-64)^{\frac{1}{3} \cdot 3} = y^3$$

$$(-64)^1 = y^3$$

$$y = \sqrt[3]{-64}$$

Es decir, $\sqrt[3]{-64} = (-64)^{\frac{1}{3}}$.

En general, si $n \neq 1$ es un número natural, se tiene: $b^{\frac{1}{n}} = a$.

Se eleva a n , en ambos lados de la igualdad:

$$b^{\frac{1}{n}} = a \Rightarrow \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^n \Rightarrow b^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^n \Rightarrow b^1 = a^n \quad /(\)^n$$

Por definición de raíz enésima: $\sqrt[n]{b} = a$.

Entonces: $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$

Por tanto, la raíz enésima de un número corresponde a una potencia de exponente fraccionario cuyo numerador es igual a **1** y su denominador es un número natural **n**.

Ejemplos

1. $\sqrt[7]{10} = 10^{\frac{1}{7}}$

3. $\sqrt[4]{622} = 622^{\frac{1}{4}}$

2. $\sqrt[5]{124} = 124^{\frac{1}{5}}$

4. $\sqrt[4]{\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$

> ¿SABÍAS QUE...?

En el siglo XIV, el catedrático francés **Nicole Oresmes** (1323-1382) en sus publicaciones *Proportionum Algorismus* y *Proportionum De Proportionibus* incorpora el primer uso de un exponente fraccionario, aunque, por supuesto, no en notación moderna.

¿Qué raíz enésima representa la potencia $2^{\frac{3}{4}}$?

Si $2^{\frac{3}{4}} = x$, entonces: $2^{\frac{3}{4}} = x \Rightarrow 2^{3 \cdot \frac{1}{4}} = x \Rightarrow (2^3)^{\frac{1}{4}} = x \Rightarrow \sqrt[4]{2^3} = x$.

Luego, $\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$.

En general, si m y n son números naturales, tal que $m \neq 1$ y $n \neq 1$, se obtiene: $b^{\frac{m}{n}} = a$.

Por lo tanto: $b^{\frac{m}{n}} = a \Rightarrow (b^m)^{\frac{1}{n}} = a \Rightarrow (b^m)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \sqrt[n]{b^m} = a$

$$\sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}$$

Es decir, la raíz enésima de b elevada a m , corresponde a la potencia de base b y exponente $\frac{m}{n}$.

Ejemplos

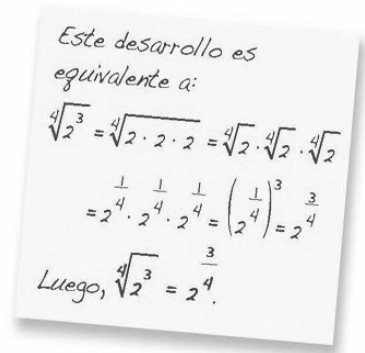
1. $\sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$

2. $\sqrt[6]{a^3 b^2} = (a^3 b^2)^{\frac{1}{6}} = (a^3)^{\frac{1}{6}} \cdot (b^2)^{\frac{1}{6}} = a^{3 \cdot \frac{1}{6}} \cdot b^{2 \cdot \frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

Expresando como potencia.

Por propiedades de potencias.

Expresando como raíz.



SOS MAT

La interpretación de las raíces como potencias de exponente fraccionario permitirá estudiar las operaciones entre ellas, utilizando las propiedades ya conocidas para las potencias.

PRACTICA

Escribe como raíz las siguientes potencias, y como potencias las raíces, según corresponda.

- | | | |
|---------------------------|-------------------------|------------------------------------|
| 1. $625^{\frac{5}{2}}$ | 4. $6,25^{\frac{1}{2}}$ | 7. $\sqrt[4]{128}$ |
| 2. $125^{\frac{2}{3}}$ | 5. $\sqrt{1.444}$ | 8. $\sqrt[6n]{a^{2n} b^{n^2} c^4}$ |
| 3. $(-216)^{\frac{1}{3}}$ | 6. $\sqrt[3]{343}$ | 9. $n^{\sqrt{n^2+n}}$ |

Calcula las siguientes expresiones.

- | | |
|--|--|
| 10. $8^{\frac{2}{3}} + 9^{0,5}$ | 12. $\frac{2}{3} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot 8^{-\frac{2}{3}}$ |
| 11. $0,25^{\frac{1}{2}} + 16^{-\frac{3}{4}}$ | 13. $0,001^{\frac{1}{3}} - 125^{\frac{1}{3}} + 343^{\frac{2}{3}}$ |

Reduce las siguientes expresiones.

14. $\sqrt{196} + \sqrt[3]{343} - \sqrt[3]{-729}$
15. $\sqrt[7]{-128} - \sqrt[5]{-0,00032}$
16. $\sqrt{16} + \sqrt[3]{1.000} - \sqrt[3]{-0,216}$
17. $2\sqrt{49x^2} + \sqrt{25y^2} - 5\sqrt[3]{216x^3} - \sqrt[3]{64y^3}$
18. $\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[3]{3.125}} + \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}$
 $\sqrt{\frac{25}{81}}$
19. $2\sqrt[4]{x^8} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt[3]{27x^6}$

> **SOS MAT**

Si $a < b$, se cumple que: $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Donde $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ son números reales.

Ejemplos

1. $4 < 9 \Leftrightarrow \sqrt{4} < \sqrt{9}$, ya que
 $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt{9} = 3$.

2. $-64 < 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-64} < \sqrt[3]{8}$, ya que
 $\sqrt[3]{-64} = -4$ y $\sqrt[3]{8} = 2$.

De manera análoga se realiza la simplificación del índice de una raíz.

$$\sqrt[n]{a^{mr}} = a^{\frac{m}{n \cdot r}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Luego, $\sqrt[n]{a^{m \cdot r}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Donde $\sqrt[n]{a^m}$ es un número real.

Propiedades de la operatoria con raíces

Cambio de índice de una raíz

Ordena de mayor a menor las siguientes raíces.

$$\sqrt[3]{5} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt[6]{32}$$

Para ordenar de mayor a menor las raíces, se deben igualar los índices. Para ello se representan las raíces como potencias de exponente fraccionario y se amplifican los exponentes para obtener un índice común, en este caso **6**, tal como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5} &= 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \\ \sqrt{3} &= 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}} = 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27} \\ \sqrt[6]{32} &= \sqrt[6]{32} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el orden es $\sqrt[6]{32} > \sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$.

En general, para amplificar el índice de una raíz:



Por lo tanto,

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nr]{a^{m \cdot r}}$$

Multiplicación y división de raíces

La multiplicación y división de raíces se clasificarán en tres casos, considerando las cantidades subradicales y los índices de las raíces.

Caso 1: multiplicación y división de raíces con igual índice.

Se consideran los siguientes ejemplos de multiplicación y división de raíces.

Multiplicación	División
Calcula $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{17}$.	Calcula $\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{2}$.
$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{17} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 17^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 17)^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{2} = 12^{\frac{1}{5}} : 2^{\frac{1}{5}} = (12 : 2)^{\frac{1}{5}}$
$= \sqrt[3]{5 \cdot 17} = \sqrt[3]{85}$	$= \sqrt[5]{12 : 2} = \sqrt[5]{6}$
Luego, $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{17} = \sqrt[3]{85}$.	Luego, $\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{6}$.

Los resultados anteriores se pueden generalizar mediante las siguientes igualdades:

$$\text{Multiplicación} \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \cdot c}$$

$$\text{División} \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a : c} = \sqrt[n]{\frac{a}{c}}$$

Se considera $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{c}$ números reales.

Caso 2: multiplicación y división de raíces con igual cantidad subradical.

Se consideran los siguientes ejemplos de multiplicación y división de raíces.

Multiplicación	División
Calcula $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{5}$. $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$ $= 5^{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)} = 5^{\left(\frac{3+4}{4 \cdot 3}\right)}$ $= 4 \cdot \sqrt[3]{5^{3+4}} = 12\sqrt[7]{5}$ Luego, $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = 12\sqrt[7]{5}$.	Calcula $\sqrt[5]{7} : \sqrt[8]{7}$. $\sqrt[5]{7} : \sqrt[8]{7} = 7^{\frac{1}{5}} : 7^{\frac{1}{8}}$ $= 7^{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right)} = 7^{\left(\frac{8-5}{5 \cdot 8}\right)}$ $= 5 \cdot \sqrt[8]{7^{8-5}} = 40\sqrt[8]{7^3}$ Luego, $\sqrt[5]{7} : \sqrt[8]{7} = 40\sqrt[8]{7^3}$.

Los resultados anteriores se pueden generalizar mediante las siguientes igualdades:

$$\text{Multiplicación} \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m+n}}$$

$$\text{División} \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$$

Caso 3: multiplicación y división de raíces con distinto índice y cantidad subradical.

Se consideran los siguientes ejemplos de multiplicación y división de raíces.

Multiplicación	División
Calcula $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{5}$. $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = 8^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$ $= 8^{\frac{3}{4 \cdot 3}} \cdot 5^{\frac{4}{3 \cdot 4}}$ $= 4 \cdot \sqrt[3]{8^3} \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{5^4}$ $= 4 \cdot \sqrt[3]{8^3 \cdot 5^4} = 12\sqrt[3]{8^3 \cdot 5^4}$ Luego, $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = 12\sqrt[3]{8^3 \cdot 5^4}$.	Calcula $\sqrt[6]{2} : \sqrt[5]{9}$. $\sqrt[6]{2} : \sqrt[5]{9} = 2^{\frac{1}{6}} : 9^{\frac{1}{5}}$ $= 2^{\frac{5}{6 \cdot 5}} : 9^{\frac{6}{5 \cdot 6}}$ $= 6 \cdot \sqrt[5]{2^5} : 6 \cdot \sqrt[6]{9^6}$ $= 6 \cdot \sqrt[5]{2^5} : 9^6 = 30\sqrt[5]{\frac{2^5}{9^6}}$ Luego, $\sqrt[6]{2} : \sqrt[5]{9} = 30\sqrt[5]{\frac{2^5}{9^6}}$.

Los resultados anteriores se pueden generalizar mediante las siguientes igualdades, considerando que a y c son positivos:

$$\text{Multiplicación} \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot c^n}$$

$$\text{División} \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{c} = n \cdot m \sqrt[n \cdot m]{\frac{a^m}{c^n}}$$

Se considera $\sqrt[n]{c}$ un número real.

Potencia de una raíz y raíz de una raíz

En cursos anteriores se estudió la siguiente propiedad de las potencias:

$$(6^3)^5 = 6^{3 \cdot 5}$$

Por lo tanto, al aplicar la propiedad anterior a las raíces, se obtienen las siguientes propiedades:

Potencia de una raíz	Raíz de una raíz
$(\sqrt[3]{6})^5 = \left(6^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 6^{\frac{1}{3} \cdot 5} = 6^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{6^5}$ <p>Se expresa la raíz como potencia. Potencia de potencias. Se expresa la potencia como raíz.</p>	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{6}} = \left(6^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 6^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = 6^{\frac{1}{3 \cdot 5}} = \sqrt[3 \cdot 5]{6}$ <p>Se expresa la raíz como potencia. Potencia de potencias. Se expresa la potencia como raíz.</p>

Los resultados anteriores se pueden generalizar mediante las siguientes igualdades:

Potencia de una raíz $\triangleright (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Raíz de una raíz $\triangleright \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Se considera $\sqrt[n]{a}$ un número real.

Ejemplo

Reduce la expresión $(\sqrt[3]{4a})^5 + 3\sqrt[6]{\sqrt{a^5}}$.

Se tiene:

$$(\sqrt[3]{4a})^5 = (3 \cdot \sqrt[4]{a})^5 = 12\sqrt[5]{a}$$

$$3 \cdot \sqrt[6]{\sqrt{a^5}} = 3 \cdot \sqrt[6]{2 \cdot \sqrt{a^5}} = 3 \cdot \sqrt[12]{a^5}$$

Se aplica raíz de una raíz.

Se aplica potencia de una raíz.

Se aplica raíz de una raíz.

Luego, la expresión reducida resulta $4\sqrt[12]{a^5}$, ya que:

$$(\sqrt[3]{4a})^5 + 3\sqrt[6]{\sqrt{a^5}} = 12\sqrt[5]{a} + 3\sqrt[12]{a^5} = 4\sqrt[12]{a^5}$$

Introducción y extracción de términos en una raíz

Considera los siguientes ejemplos.

Introducción de términos en una raíz	Extracción de términos de una raíz
$5 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{375}$ <p>Por lo tanto, $5 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$.</p>	$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3} = 2 \cdot \sqrt[4]{3}$ <p>Por lo tanto, $\sqrt[4]{48} = 2 \cdot \sqrt[4]{3}$.</p>

Los resultados anteriores se pueden generalizar mediante la siguiente igualdad:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Observa que esta propiedad se puede utilizar tanto para introducir un coeficiente a la raíz, como para extraer de ella un factor de la cantidad subradical y expresar la raíz de manera más sencilla.

Ejemplos

1. Calcula el valor de $\sqrt{810} + \sqrt{250}$.

Se tiene:

$$\sqrt{810} = \sqrt{81 \cdot 10} = \sqrt{9^2 \cdot 10} = 9\sqrt{10} \quad \text{y} \quad \sqrt{250} = \sqrt{25 \cdot 10} = \sqrt{5^2 \cdot 10} = 5\sqrt{10}$$

Al remplazar en la adición, se obtiene: $\sqrt{810} + \sqrt{250} = 9\sqrt{10} + 5\sqrt{10} = 14\sqrt{10}$.

Luego, $\sqrt{810} + \sqrt{250} = 14\sqrt{10}$.

Se factoriza por uno o varios números cuadrados.

2. Reduce a una raíz la expresión $\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}}$.

$$\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{2^2 \cdot 2}} = \sqrt{2\sqrt{8}} = \sqrt{2^4\sqrt{8}} = \sqrt{2^4 \cdot 2^4 \cdot 8} = \sqrt{4\sqrt{128}} = \sqrt[8]{128}$$

Se introduce el 2 a la raíz.
Raíz de raíz.
Se introduce el 2 a la raíz.
Raíz de raíz.

Luego, $\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt[8]{128}$.

> PRACTICA

Determina, en cada caso, una expresión equivalente a la dada, donde su cantidad radical sea la menor.

- | | | |
|-------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. $\sqrt{27}$ | 4. $\sqrt[3]{128}$ | 7. $\sqrt[3]{a^5 b^7}$ |
| 2. $\sqrt{150}$ | 5. $\sqrt[4]{324}$ | 8. $\sqrt[5]{12x^4 y^7 z^{12}}$ |
| 3. $\sqrt[3]{24}$ | 6. $\sqrt{16 - \frac{324}{25}}$ | 9. $\sqrt[3]{-64a^3 b^5 c^7}$ |

Expresa cada raíz como otra equivalente de menor índice.

- | | |
|--------------------------|---------------------------------|
| 10. $\sqrt[18]{a^{12}}$ | 12. $\sqrt[9]{a^6 b^3}$ |
| 11. $\sqrt[12]{a^2 b^2}$ | 13. $\sqrt[100]{a^{20} b^{50}}$ |

Expresa en una sola raíz, reduciendo cuando sea posible.

- | | | |
|-------------------------|------------------------------|--------------------|
| 14. $(\sqrt[3]{7})^2$ | 16. $(\sqrt[6]{ab^3})^5$ | 18. $5\sqrt{2}$ |
| 15. $(\sqrt[5]{x^2})^3$ | 17. $(\sqrt[4]{5a^2 b^2})^2$ | 19. $3\sqrt[3]{5}$ |

- | | | |
|-------------------------------------|-----------------------|-------------------------------|
| 20. $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ | 22. $\sqrt{2^3 5}$ | 24. $\sqrt[3]{b^5 a}$ |
| 21. $\sqrt{\sqrt{3}}$ | 23. $\sqrt[3]{3^3 3}$ | 25. $a \cdot \sqrt[4]{a^4 b}$ |

Reduce en cada caso a su mínima expresión.

- | | |
|---|---|
| 26. $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{4}$ | 33. $\sqrt[5]{16} : \sqrt[5]{2}$ |
| 27. $\sqrt{15} \cdot \sqrt{6}$ | 34. $\sqrt[3]{49} : \sqrt[3]{14}$ |
| 28. $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b}$ | 35. $\sqrt[8]{b^3 c^4} : \sqrt[8]{b^5 c^2}$ |
| 29. $\sqrt[7]{a^2 b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2 b^3}$ | 36. $\sqrt[3]{3} : \sqrt[5]{2}$ |
| 30. $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[6]{\frac{3}{5}}$ | 37. $\sqrt{3} : \sqrt[8]{2}$ |
| 31. $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$ | 38. $\sqrt[6]{ab^3} : \sqrt[3]{b^2}$ |
| 32. $\sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[3]{a^2 b}$ | 39. $\sqrt[5]{a} : \sqrt[7]{a^3}$ |

Ejercicios resueltos

1. Considera las siguientes raíces: $A = \sqrt[3]{6}$, $B = \sqrt{2}$ y $C = \sqrt[4]{5}$.

- Ordena las raíces de menor a mayor.
- Determina el valor de X en la siguiente igualdad: $BCX = A$.

Se igualan los índices de las raíces para poder compararlas.

- a. Para igualar los índices de las raíces, se obtiene el **mcm** entre ellos, que en este caso es **12**. Luego, se multiplica cada expresión por el número que corresponde.

$$A = \sqrt[3]{6} = \sqrt[3 \cdot 4]{6^4} = \sqrt[12]{1.296} \quad B = \sqrt{2} = \sqrt[2 \cdot 6]{2^6} = \sqrt[12]{64} \quad C = \sqrt[4]{5} = \sqrt[4 \cdot 3]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

Se comparan las cantidades subradicales y se obtiene que $B < C < A$, es decir,

$$\sqrt{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{6}.$$

Se despeja la variable X , luego se reemplazan los valores de A , B y C , y se determina su valor numérico.

- b. Como se debe cumplir que $BCX = A$, entonces $X = \frac{A}{BC}$. Luego:

Se aplican las propiedades de raíces para calcular el valor de la expresión.

$$X = \frac{A}{BC} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[12]{6^4}}{\sqrt[12]{2^6} \cdot \sqrt[12]{5^3}} = \sqrt[12]{\frac{(2 \cdot 3)^4}{2^6 \cdot 5^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^4 \cdot 3^4}{2^6 \cdot 5^3}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^2 \cdot 5^3}} = \sqrt[12]{\frac{81}{500}}$$

Se expresan todas las raíces con un índice común (12).
Se expresa como una sola raíz.
Se simplifica y se multiplican los términos.

Por lo tanto, $X = \sqrt[12]{\frac{81}{500}}$.

2. Si $m = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$, ¿cuál es el valor de m^2 ?

Se desarrolla la expresión correspondiente a m^2 , utilizando el valor de m .

Se desarrolla el cuadrado de binomio y se reducen raíces iguales.

$$\begin{aligned} m^2 &= (\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 + 2(\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{2-\sqrt{3}}) + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 \\ &= 2 + \cancel{\sqrt{3}} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})}\sqrt{(2-\sqrt{3})} + 2 - \cancel{\sqrt{3}} \\ &= 4 + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\ &= 4 + 2\sqrt{4-3} \\ &= 4 + 2\sqrt{1} \triangleright m^2 = 6 \end{aligned}$$

Se multiplican las raíces.

Por lo tanto, $m^2 = 6$.